



**Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 5 :  
Détection de marques de cylindres sur une ligne  
sidérurgique, ou comment séparer des sources  
périodiques dans une image bruitée**

Nina Aguillon, Aalae Benki, Simon Henrot, Christophe Steiner, Ibrahim  
Zangré

► **To cite this version:**

Nina Aguillon, Aalae Benki, Simon Henrot, Christophe Steiner, Ibrahim Zangré. Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 5 : Détection de marques de cylindres sur une ligne sidérurgique, ou comment séparer des sources périodiques dans une image bruitée. 2013. hal-00833430

**HAL Id: hal-00833430**

**<https://hal.science/hal-00833430>**

Preprint submitted on 12 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SEMAINE D'ÉTUDE MATHS-ENTREPRISES 5

11–15 février 2013, École des Mines de Nancy

Détection de marques de cylindres sur une ligne sidérurgique,  
ou comment séparer des sources périodiques dans une image  
bruitée

Nina AGUILLON<sup>a</sup>      Aalae BENKI<sup>b</sup>  
Simon HENROT<sup>c</sup>      Christophe STEINER<sup>d</sup>  
Ibrahim ZANGRÉ<sup>e</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud 11, France*

<sup>b</sup> *INRIA, France*

<sup>c</sup> *Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Université de Lorraine, France*

<sup>d</sup> *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg, France*

<sup>e</sup> *Institut Elie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, France*

Sujet proposé par :



Correspondant : Gabriel FRICOUT (Arcelor Mittal)



### **Résumé**

Lors de la fabrication de tôle par laminage, des défauts périodiques peuvent être marqués par les cylindres qui compressent le métal. Un contrôle automatique est incorporé dans le processus afin de détecter les défauts par traitement numérique des images prises par des capteurs. Ces images sont de grandes tailles et fortement bruitées de sorte que les défauts sont souvent à peine perceptibles. Arcelor Mittal propose ici de réfléchir sur des méthodes robustes et performantes qui permettraient l'extraction des composantes périodiques des images. Ce document est la synthèse des méthodes et pistes que nous avons explorées lors de cette cinquième édition de la SEME à l'École des Mines de Nancy.

**Mots clés :** laminage - signal périodique - bruit blanc - autocorrélation - moyenne  
- accumulation - filtrage - patch - médiane - algorithme - fractale - EDP - segmentation  
- régularisation (an)isotrope

## Remerciements

Un grand merci aux organisateurs de cette SEME nancéienne grâce à qui nous avons pu faire des mathématiques dans un cadre un peu différent. Merci à Arcelor Mittal, en la personne de Gabriel Fricout, d'avoir proposé ce sujet. Gabriel fut un interlocuteur parfait, disponible et réactif. Enfin, merci à l'École des Mines de Nancy d'avoir mis à disposition ses locaux.

## 1 Introduction

Le traitement numérique des images trouve des applications dans un nombre croissant de domaines, aussi divers que le tri automatique du courrier, la reconnaissance de cibles militaires, le contrôle industriel (par exemple la détection en temps réel de défauts dans une chaîne de production industrielle) etc.

C'est à ce dernier point que nous allons porter un intérêt particulier dans le présent document. En effet, dans le cadre d'une production industrielle automatisée, des capteurs sont souvent utilisés pour détecter d'éventuelles imperfections.

On se place ici dans le cadre de la fabrication de tôle en acier obtenue lors d'un processus appelé "laminage à froid" : plusieurs cylindres compressent successivement le métal en réduisant son épaisseur jusqu'à l'obtention des dimensions voulues. Cependant des défauts présents sur les cylindres de laminage peuvent s'imprimer sur la tôle, sur laquelle les défauts apparaîtront alors de manière périodique.

Pour éviter qu'une tôle défectueuse ne soit introduite dans une chaîne de production, une procédure est mise en place pour détecter les défauts en temps réel et permettre ainsi le remplacement d'éventuels cylindres défectueux.

Les difficultés majeures dans la procédure de détection automatique :

- les défauts à détecter sont souvent de très petite taille, mais ont l'avantage d'être périodiques.
- les images à traiter sont de très grande taille
- des motifs très marqués et contrastés viennent entacher les images. Nous appellerons ces grandes structures les "arbres".

L'objectif est de construire des algorithmes de traitement d'images qui devront satisfaire les contraintes suivantes :

- La robustesse : la détection doit être infaillible car les enjeux économiques sont importants.
- La rapidité : on doit pouvoir traiter des dizaines de millions de pixels en temps presque réel.

En général, l'extraction de la composante périodique est faite en deux temps :

- Une étape de filtrage : on élimine d'abord les composantes aperiodiques en éliminant les arbres.
- Une étape d'accumulation : on calcule une moyenne (mobile ou pas) des différentes séquences d'images pour régulariser (débruiter) et obtenir la composante périodique.

Nous présentons ici quelques extensions et/ou généralisation de ce type de méthode.

Le document est organisé comme suit. Dans la seconde section ?? nous présentons un algorithme dit de Barros-Cichocki [?]. Ensuite, une méthode d'élimination des arbres par moyennes directionnelles est introduite dans la section ?. Dans la section ? est présentée plusieurs méthodes-tests efficace pour extraire la composante périodique des images. Enfin dans la section ??, nous explorons quelques perspectives et pistes de réflexion.

## 2 Extraction d'un signal périodique à partir d'un signal bruité

### 2.1 Présentation du problème

Le problème consistant à extraire un signal périodique, ou possédant une structure temporelle particulière, à partir d'une observation bruitée de ce signal se rencontre dans de nombreux domaines. Ainsi en audio, de nombreuses applications nécessitent de séparer des sources musicales ou de paroles; en électrocardiographie, la séparation du pouls de la mère et de l'enfant est nécessaire pour certains examens. Dans cette section, nous nous intéressons à une méthode issue de ce dernier domaine permettant d'extraire la composante périodique de manière extrêmement efficace *à l'aide de plusieurs observations du signal*.

### 2.2 Modèle du signal

On considère le modèle suivant :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur d'observation,  $\mathbf{s}$  est le vecteur de sources et  $k$  est l'index de temps. La matrice de mélange  $\mathbf{A}$  est supposée inversible. Dans la suite, on suppose sans perte de généralité que l'on dispose de deux sources et de deux observations. Si  $\mathbf{s}_1$  est la composante périodique du signal de période  $T$  supposée connue (hypothèse vérifiée en pratique) et  $\mathbf{s}_2$  est la composante apériodique, la méthode est fondée sur les hypothèses suivantes :

1.  $R_{1,1}(T) \neq 0$
2.  $R_{1,2} \simeq 0$

où  $R_{i,j}$  est la fonction d'intercorrélation des signaux  $\mathbf{s}_i$  et  $\mathbf{s}_j$ , donnée par

$$R_{i,j} = \mathbb{E}[s_i(n)s_j(n-k)]. \quad (2)$$

Cette fonction mesure la similarité temporelle de signaux et permet ainsi de détecter des motifs répétés dans un signal. Dans la pratique, les fonctions d'intercorrélation sont estimées par des moyennes temporelles car l'on ne dispose que d'une seule réalisation des processus.

### 2.3 Algorithme de Barros - Cichocki

L'algorithme que nous utilisons ici a été proposé par Barros et Cichocki en 2001 [?]. Le principe est de construire un signal  $\mathbf{y} = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$  permettant d'estimer  $\mathbf{s}_1$  à un facteur multiplicatif près. L'idée générale est de maximiser l'autocorrélation du signal  $\mathbf{y}$ , ou de manière équivalente, de minimiser l'erreur quadratique  $\mathbb{E}[\epsilon^2]$  où :

$$\epsilon_k = y_k - y_{k-T} \quad (3)$$

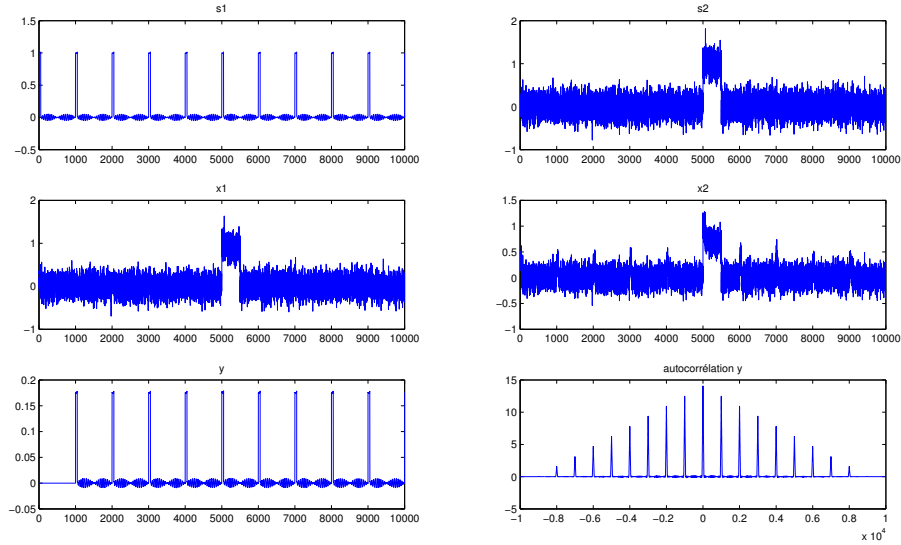


FIGURE 1 – Résultats expérimentaux. Première ligne : signaux sources  $\mathbf{s}_1$  et  $\mathbf{s}_2$ . Deuxième ligne : signaux observés  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . Troisième ligne : signal estimé  $\mathbf{y}$  et sa fonction d'auto-corrélation.

La solution est alors simplement donnée par :

$$w_k = \mathbb{E}[\mathbf{xx}^T]^{-1} \mathbb{E}[y_{k-T}x_k] \quad (4)$$

On donne en figure (??) les résultats expérimentaux obtenus pour notre implémentation de l'algorithme. Nous simulons des données synthétiques, modélisant grossièrement une colonne de l'image par la somme du signal  $\mathbf{s}_1$  (mélange de texture obtenu par un mélange de fonctions trigonométriques et d'un défaut périodique synthétisé par une raie) et du signal  $\mathbf{s}_2$  (bruit blanc gaussien et perturbation locale aperiodique provoquée par un dépôt d'huile sur la ligne).

## 2.4 Perspectives et problèmes pratiques

De nombreuses variations de cette méthode ont été proposées dans la littérature, permettant notamment de prendre en compte des variations de la période, des violations des hypothèses originales (notamment la nullité de l'intercorrélation des signaux à la valeur  $T$ ), ou bien de proposer un traitement en ligne des données. Une autre amélioration pourrait consister à traiter le problème en considérant conjointement toutes les colonnes de l'image pour améliorer les performances de détection.

La principale difficulté quant à l'application de l'algorithme réside en la nécessité de disposer d'au moins deux mélanges différents des signaux sources, alors que l'on ne dispose que d'une observation de la colonne de l'image. Une solution pourrait consister à utiliser deux colonnes adjacentes, ou bien deux groupes de périodes successives sur la même image : l'efficacité de la méthode reste alors à démontrer. Pour cette raison, nous proposons dans la suite une méthode de détection basée sur une autre information que la périodicité du signal.

### 3 Élimination des arbres par moyennes directionnelles

Les arbres sont de grandes structures, très contrastées, qui varient lentement et ont une direction privilégiée selon la verticale. Les défauts quant à eux, et plus généralement les empreintes périodiques liées à la rugosité des cylindres, présentent des oscillations bien plus rapides et sont de petites tailles. Dans cette section, nous oublions le caractère périodique des images et tentons de séparer leur composante lente (les arbres) de leur composante rapide (les rugosités avec leurs éventuels défauts). Nous travaillons sur des données jouets en une dimension d'espace, de la forme

$$x \in [0, 1], \quad f(x) = \text{lent}(x) + \text{rapide}(x).$$

Nous avons pris

$$\text{lent}(x) = \sin(4\pi x) - 4\sqrt{4x} + 10(\mathbf{1}_{x>0.6} + \mathbf{1}_{0.1<x<0.3})$$

qui est bien une fonction qui varie lentement, mais qui présente des discontinuités marquées afin de reproduire le très fort gradient observé au bord des arbres. D'autre part, la fonction rapide est

$$\text{rapide}(x) = \sin(200\pi x) - 12 * \mathbf{1}_{0.8<x<0.81} - 8 * \mathbf{1}_{0.22<x<0.23}.$$

La partie  $\sin(200\pi x)$  représente la contribution des rugosités, de faible contraste, tandis que la seconde partie modélise deux défauts petits, mais de forte amplitude. Rappelons que ce sont ces défauts que nous cherchons à détecter in fine. La fonction  $f$  et sa décomposition en partie lente et rapide sont représentées dans la Figure (??).

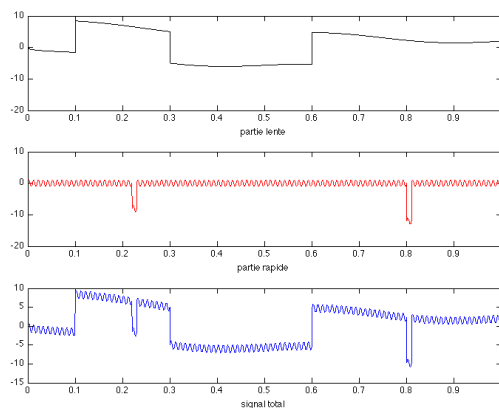


FIGURE 2 – En bas en bleu, le signal  $f$  à décomposer en une partie *rapide* en rouge au milieu, et une partie *lente* en haut en noir.

#### 3.1 Présentation de la méthode

Une première idée est de retirer, en chaque point, une moyenne locale de  $f$ . On choisit la longueur  $l$  de l'intervalle sur lequel on effectue les moyennes locales, et on espère que

$$\text{Moy}(x) = \frac{1}{\min(1, x + l/2) - \max(0, x - l/2)} \int_{\max(0, x-l/2)}^{\min(1, x+l/2)} f(y) dy$$

est une bonne approximation de la partie lente. Les minimum et maximum permettent de réduire l'intervalle lorsqu'on s'approche de ses extrémités. Cette approximation est mauvaise si la partie lente présente des discontinuités. En effet, dans le cas très simple où la partie lente est la fonction de Heaviside  $H(x) = \mathbf{1}_{x>0.5}$  et où il n'y a pas de partie rapide, la moyennisation lisse la discontinuité, et la partie rapide extraite présente par conséquent un pic autour de la discontinuité. Ceci est montré sur la Figure (??).

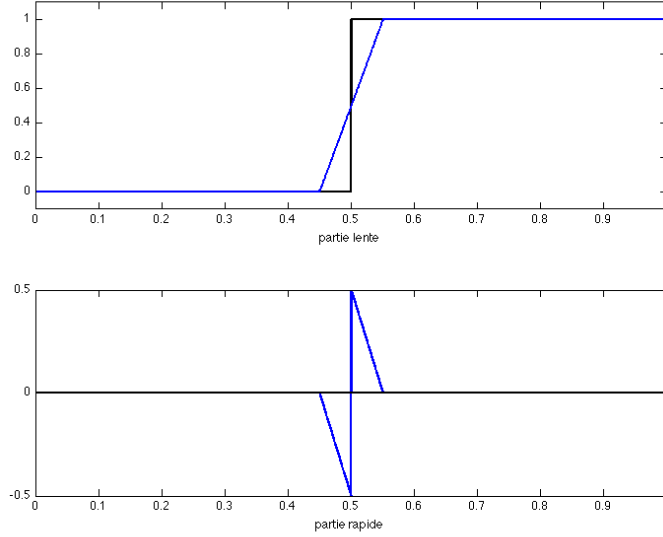


FIGURE 3 – De haut en bas, parties lente et rapide extraites par la méthode de moyenne locale pour  $l = 0.1$ . Par rapport au signal initial en noir, la discontinuité de la partie lente est lissée, ce qui crée un défaut artificiel dans la partie rapide.

Le problème de cette moyennisation est qu'elle ne perçoit pas que les points de part et d'autre de la discontinuité n'appartiennent pas à la même zone de l'image. Pour pallier à ce défaut, nous calculons trois moyennes locales : une centrée, une à gauche et une à droite, comme suit :

$$\begin{cases} \text{Moy}_c(x) &= \frac{1}{l} \int_{x-l/2}^{x+l/2} f(y) dy, \\ \text{Moy}_g(x) &= \frac{1}{l} \int_{x-l}^x f(y) dy, \\ \text{Moy}_d(x) &= \frac{1}{l} \int_x^{x+l} f(y) dy. \end{cases}$$

Pour faciliter la lecture, nous avons ici ignoré les problèmes de bords. Pour chaque point  $x$ , on détermine ensuite à quelle zone il appartient, c'est à dire de laquelle de ces moyennes il est le plus proche, et c'est cette moyenne qui est prise comme approximation de la partie lente. Ainsi on a

$$\begin{cases} z = \operatorname{argmin}_{w \in \{c, g, d\}} |f(x) - \text{Moy}_w(x)|, \\ \text{lente}(x) = \text{Moy}_z(x), \\ \text{rapide}(x) = f(x) - \text{Moy}_z(x). \end{cases}$$

Dans le cas du Heaviside, cela permet de reconstruire entièrement le signal, puisque dès que  $x$  est à gauche de la discontinuité, c'est la moyenne gauche  $\text{Moy}_g(x) = 0$  qui est choisie,



tandis que pour les points à droite de la discontinuité, c'est la moyenne droite  $\text{Moy}_d(x) = 1$ .

### 3.2 Comparaison avec la méthode de simple moyenne locale. Importance de la longueur du patch

Sur les données jouets présentées en introduction, les résultats pour un patch de longueur  $l = 0.04$  sont montrés sur la Figure (??). On retrouve le bon comportement de cette méthode au passage des discontinuités.

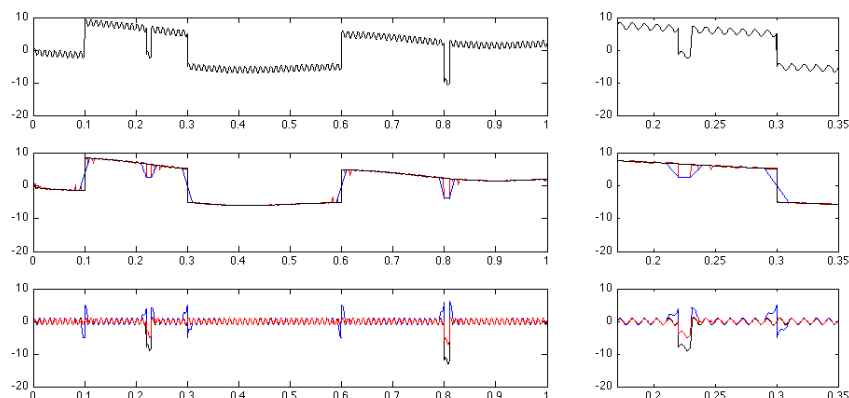


FIGURE 4 – Comparaison des méthodes de simple moyenne (en bleu) et de moyennes directionnelles (en rouge) sur le signal jouet présenté en haut, pour  $l = 0.04$ . Au milieu, les parties lentes extraites avec les deux méthodes, et en bas, les parties périodiques.

Les Figures (??) et (??) mettent en évidence l'importance du choix de  $l$  par rapport aux deux vitesses de variations. En effet, l'intervalle doit être pris suffisamment grand pour ne pas être sensible aux variations rapides. Lorsque  $l$  est trop petit, typiquement plus petit que quelques longueurs caractéristiques du signal rapide, tout est envoyé dans la partie lente (sur la Figure (??),  $l = 0.01$  est égale à la longueur caractéristique de la partie rapide). Lorsque  $l$  est trop grand, comme sur la Figure (??), les moyennes sont trop grossières et le comportement de la partie lente transparaît dans le signal périodique extrait. Il est à noter que dans ce cas, la méthode des moyennes directionnelles semble être bien moins sensible que celle de la simple moyenne, même s'il n'est pas certain qu'elle parviennent à détecter des défauts près de la frontière d'un arbre.

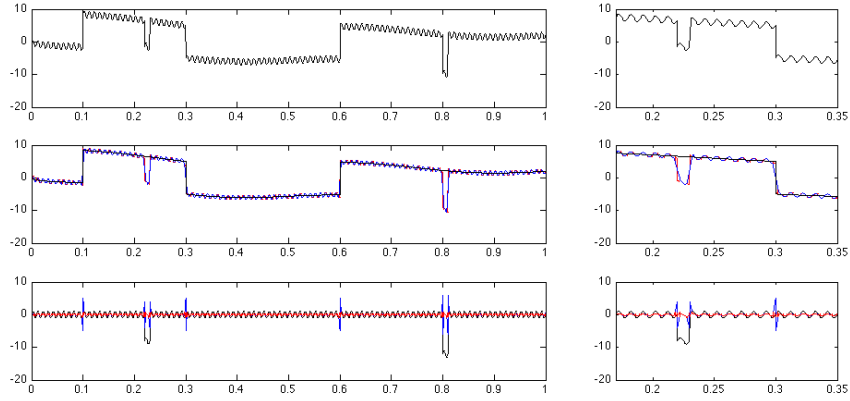


FIGURE 5 – Comparaison des méthodes de simple moyenne (en bleu) et de moyennes directionnelles (en rouge) sur le signal jouet présenté en haut, pour  $l = 0.01$ . Au milieu, les parties lentes extraites avec les deux méthodes, et en bas, les parties périodiques.

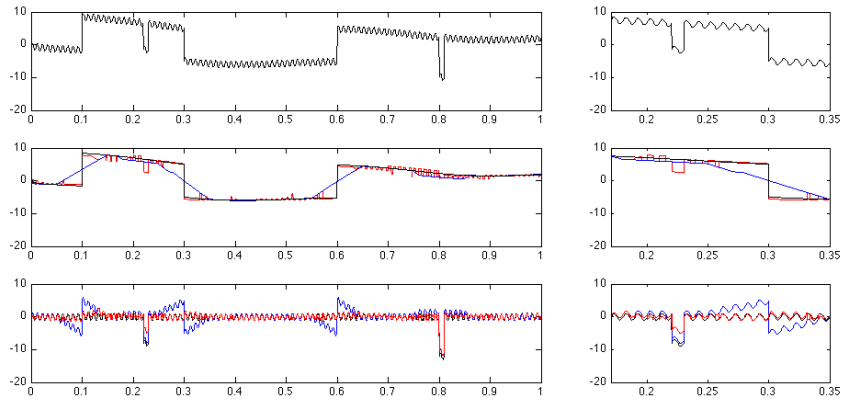


FIGURE 6 – Comparaison des méthodes de simple moyenne (en bleu) et de moyennes directionnelles (en rouge) sur le signal jouet présenté en haut, pour  $l = 0.2$ . Au milieu, les parties lentes extraites avec les deux méthodes, et en bas, les parties périodiques.

### 3.3 Résultats sur données réelles

Dans le cas des images  $2D$ , nous pouvons appliquer cette méthode car les arbres, ces grandes structures que nous cherchons à éliminer, sont allongés selon la direction verticale. On trouve en Figure (??) un exemple de signal non traité en sortie de chaîne (il s'agit en réalité d'une grande bande, dont chaque colonne est une coupe représentant une période. On voit ainsi bien le défaut en forme de virgule en bas de chaque colonne).

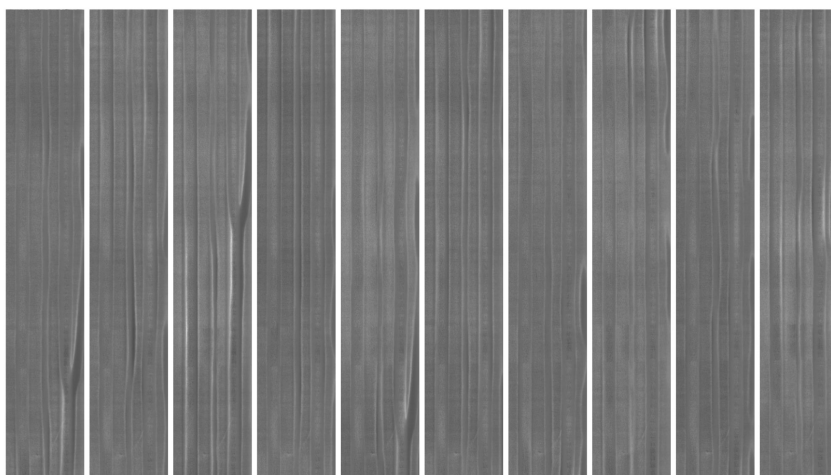


FIGURE 7 – Une image à traiter, avec des arbres et un défaut en bas

La Figure (??) montre la partie périodique extraite par la méthode des moyennes directionnelles. Le défaut est bien plus facile à repérer.

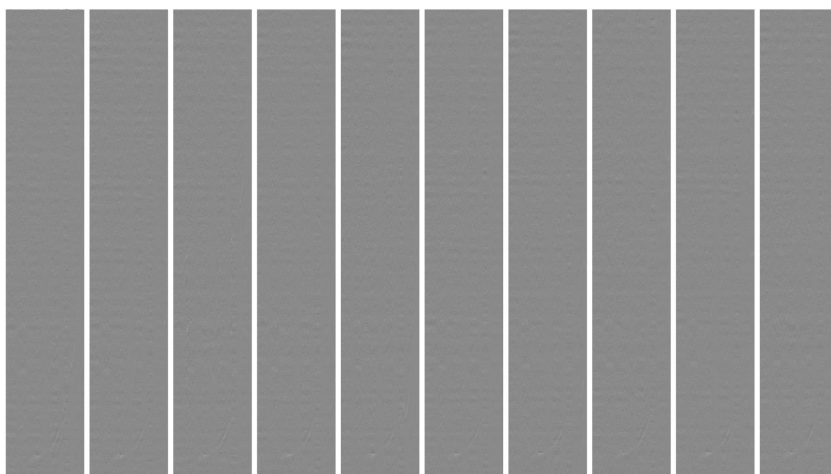


FIGURE 8 – Une image à traiter, avec des arbres et un défaut en bas

Une autre de manière de vérifier l'efficacité du filtre construit est de représenter l'autocorrélation de l'image avant et après filtrage. On voit sur la Figure (??) que les périodes ressortent bien mieux après avoir appliqué le filtre.

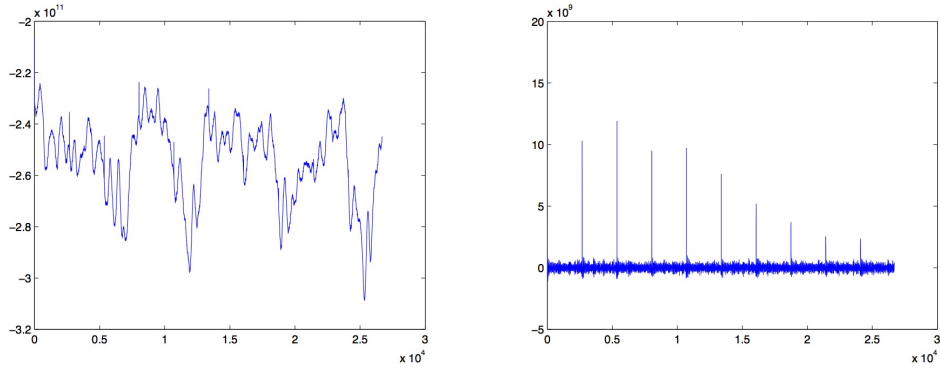


FIGURE 9 – Autocorrélation des images avant traitement (à gauche) et après, une fois les arbres retirés (à droite)

## 4 Accumulation des données

Le traitement de l'image provenant du capteur peut se décomposer en deux étapes : le *filtrage* et l'*accumulation*. La première étape a pour objectif de supprimer les *arbres* et a été traitée dans la partie précédente. L'étape d'*accumulation* supprime le bruit de l'image filtrée ainsi que des tâches non périodiques, nommées *patates*, provenant de tâches d'huile ou de résidus d'arbres.

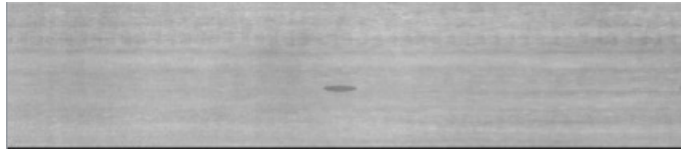


FIGURE 10 – Un exemple de patate

### 4.1 Méthodes d'accumulation

On observe  $N$  périodes de roulement des rouleaux. On dispose donc de réalisations  $v_1, v_2, \dots, v_N$  d'une loi

$$v_i = v + \varepsilon_i + pat_i$$

où  $v$  est le signal périodique sous-jacent que l'on souhaite extraire,  $\varepsilon$  est le bruit de l'image supposé gaussien et centré et  $pat$  est le terme additionnel provenant des *patates*.

Pour un numéro de pixel  $k$  donné, on cherche un estimateur  $\hat{v}(k)$  de  $v(k)$ . On suppose que

$$v_1(k) < v_2(k) < \dots < v_N(k)$$

Les estimateurs proposés sont :

1. La moyenne simple

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(k)$$

2. La médiane

$$\hat{v}(k) = \begin{cases} v_{(N+1)/2}(k) & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{v_{N/2}(k) + v_{N/2+1}(k)}{2} & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

3. La moyenne élaguée en supprimant la valeur minimale et maximale

$$\hat{v}(k) = \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} v_i(k)$$

4. La moyenne où les valeurs aberrantes détectées par un test statistique (test Q ou test de Grubbs) sont supprimées.

## 4.2 Tests de détection de valeurs aberrantes

Actuellement, l'estimateur utilisé consiste à calculer la moyenne de la série de données en supprimant la valeur minimale et maximale. Nous avons utilisé deux tests statistiques simples afin de détecter de manière plus fine les valeurs aberrantes provenant des *patates*.

### 4.2.1 Test Q

Le test Q détecte une valeur aberrante en mesurant l'écart qui la sépare de la réalisation la plus proche. Plus précisément, pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $v_i$  sera considéré comme aberrante si  $Q_i > Q_{seuil}$  où

$$Q_i = \frac{\min(v_i - v_{i-1}, v_{i+1} - v_i)}{v_N - v_1}$$

et  $Q_{seuil} = 0,412$  (niveau de confiance à 90%),  $Q_{seuil} = 0,466$  (90%) ou  $Q_{seuil} = 0,568$  (99%). Dans les simulations numériques que nous présenterons dans la suite, nous avons choisi un niveau de confiance à 90% afin de mieux supprimer les valeurs aberrantes, quitte à supprimer des valeurs correctes. Une des limitations principales de ce test réside dans le fait que deux valeurs aberrantes proches ne seront pas supprimées.

### 4.2.2 Test de Grubbs

Ce test, proposé par Grubbs [?], compare l'écart standardisé entre une réalisation et la valeur moyenne de la série de données. Ainsi pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $v_i$  sera rejeté si  $R_i > R_{seuil}$  où

$$R_i = \frac{|v_i - \bar{v}|}{Std(v)}$$

et  $R_{seuil} = 2,03$  ( $N = 10$ ),  $R_{seuil} = 1,98$  ( $N = 9$ ),  $R_{seuil} = 1,91$  ( $N = 8$ ) avec un niveau de confiance à 90%. Ce test est itératif : lorsqu'une réalisation est supprimée, le test est réeffectué sur les données restantes.

## 4.3 Résultats numériques

### 4.3.1 Données simulées

Nous avons testés les différents estimateurs sur des données jouets (Fig. ??). Pour cela, nous avons considéré un signal sinusoïdal auquel nous avons ajouté un bruit gaussien et des indicatrices d'intervalles de longueur, d'amplitude et d'emplacement aléatoires représentant les zones où se trouvent des *patates*. Le graphique en haut à gauche montre 10 réalisations de ce modèle que nous avons soumis aux différents estimateurs. La médiane semble être l'estimateur le moins sensible aux valeurs extrêmes (en bas à gauche). La moyenne élaguée (en haut à droite) donne des résultats assez proches de la méthode par test Q (en bas au centre), les erreurs de ces méthodes se concentrent en présence de plusieurs valeurs aberrantes. Le test de Grubbs (en bas à droite) améliore les résultats par rapport au test Q mais reste globalement moins précis que la médiane.

Notons que sur certains exemples, la médiane peut ne pas être le meilleur estimateur mais la situation de la Fig. ?? est celle qui apparaît le plus souvent. La phase d'accumulation est soumise à des contraintes de temps. Ainsi, le calcul de la médiane ou les tests de détection peuvent s'avérer plus coûteux en pratique que la moyenne élaguée.

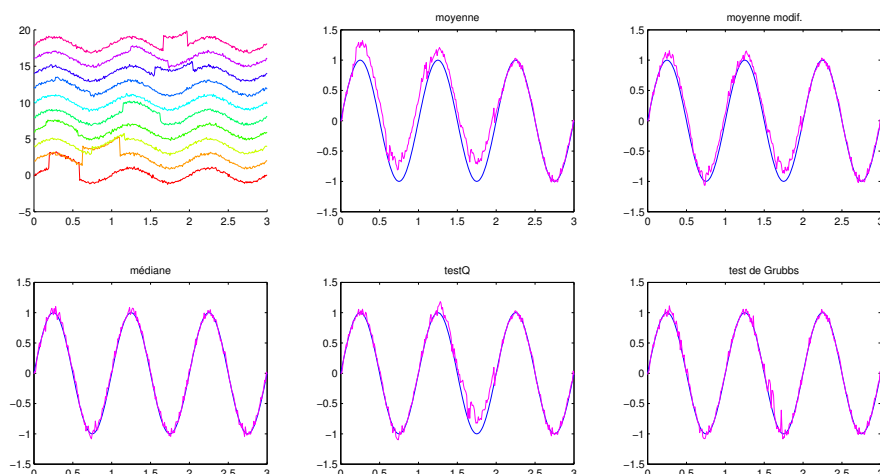


FIGURE 11 – Accumulation sur des données jouets

### 4.3.2 Données réelles

Les différents estimateurs ont été testés sur des données réelles. L'image accumulée montre un défaut périodique (en bas à droite de l'image) et est sensiblement identique suivant les estimateurs utilisés (Fig. ??). Ceci est dû au faible nombre de *patates* présentes sur le jeu de données considéré. L'autocorrélation des images accumulées (Fig. ??) montre la subsistance d'un signal périodique.

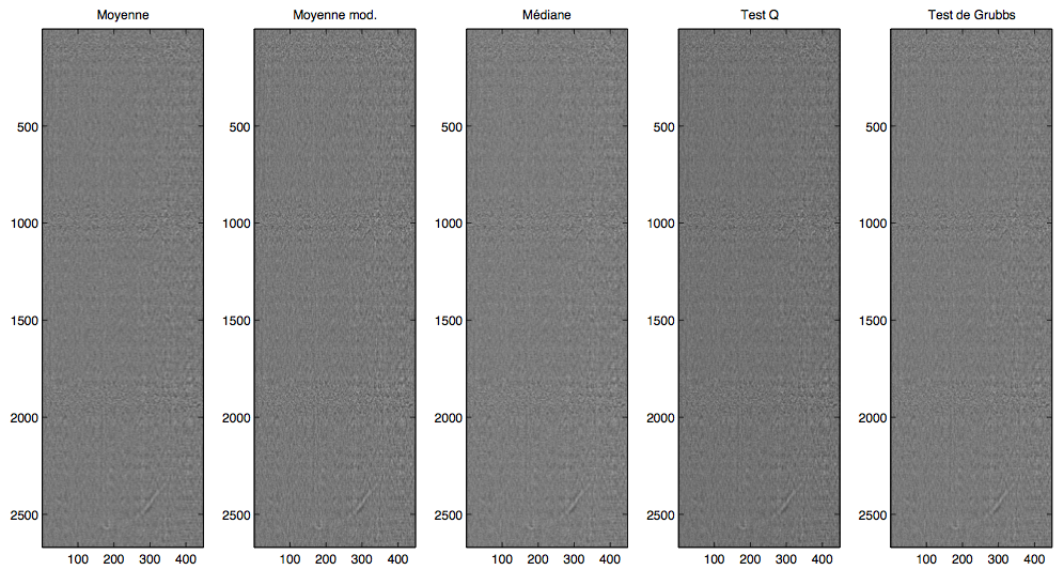


FIGURE 12 – Accumulation sur des données réelles

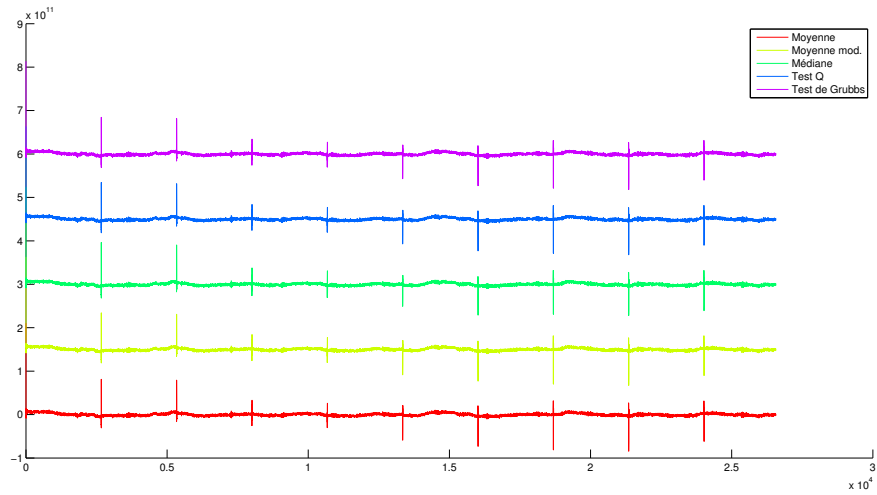


FIGURE 13 – Autocorrélation des images accumulées

## 5 Autres pistes de réflexion

Ce paragraphe est destiné à élargir le champ des techniques de résolution déjà proposées ci-dessus. Ainsi ne discuterons-nous ici que de méthodes alternatives, voire des simples pistes de réflexion et d'investigation et dont le lecteur sera renvoyé à la littérature pour certains détails de développement.

## 5.1 Calcul de corrélation par balayages fractales

La fonction d'autocorrélation est un outil indispensable ici du fait qu'elle détecte les similarités internes d'un signal. Dans notre cas, les images présentent une composante périodique que nous cherchons à détecter.

Cependant la fonction d'autocorrélation n'est définie que pour un signal 1D. Se pose alors la question de la représentation 1D d'une image 2D. Jusqu'alors nous nous contentions de parcourir l'image suivant une de ses dimensions (par lignes ou par colonnes). De ce fait, les voisinages ne sont pas respectés au maximum.

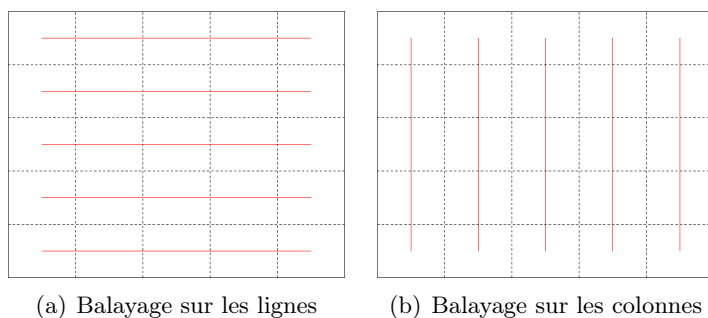


FIGURE 14 – Balayage natif suivant les lignes ou les colonnes

On peut imaginer d'autres types de courbes qui permettent de parcourir une image 2D en respectant au mieux les voisinages. Parmi de telles courbes, on distingue les courbes fractales [?, ?]. Les fractales sont des objets présentant une forte autosimilarité interne.

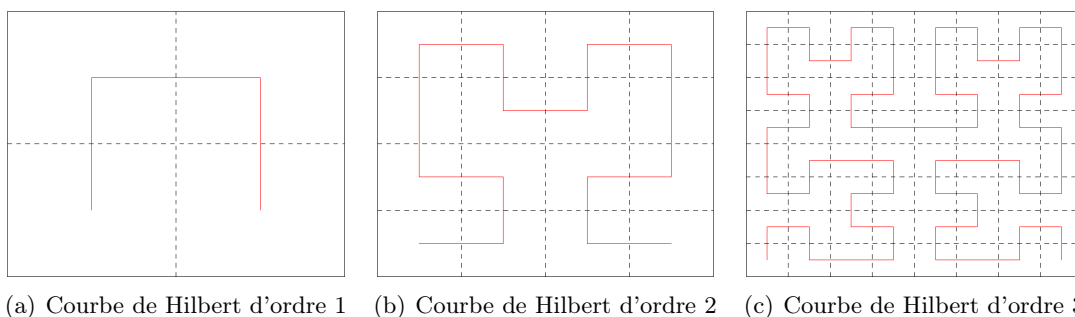


FIGURE 15 – Balayage fractale par des courbes de Hilbert ; ne s'applique qu'à des images carrées dont la taille est une puissance de 2.

De telles courbes passent en effet par tous les points du plan discret en respectant tant bien que mal les voisinages des pixels.

## 5.2 Extraction d'un signal périodique par moyennisation sélective

Nous présentons ici une méthode alternative qui permettrait de d'éliminer toutes les composantes non-périodiques dans les séquences d'images. Ainsi étant données plusieurs réalisations  $\{A^{(p)}\}_{0 \leq p \leq n}$  d'une même image, on définit l'image moyenne  $\mathbb{A}$  pour laquelle



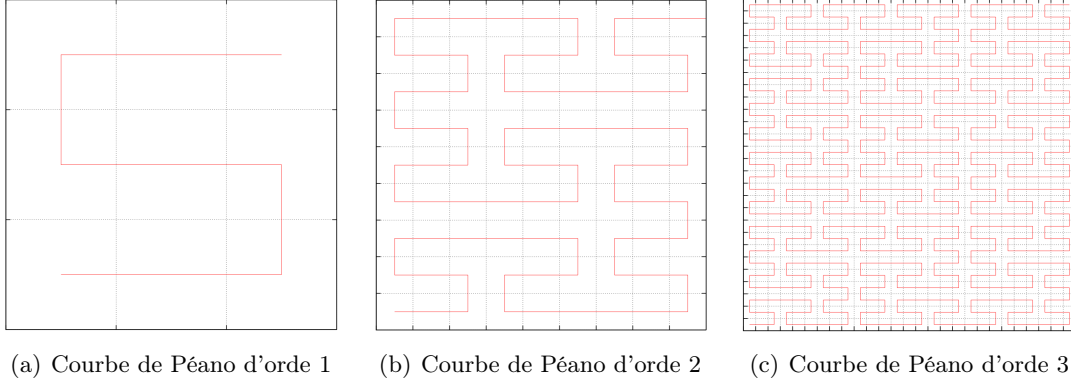


FIGURE 16 – Balayage fractale par des courbes de Pénao ; ne s'applique qu'à des images carrées dont la taille est une puissance de 3.

chaque pixel  $\mathbb{A}_{ij}$  est la moyenne de tous les pixels  $A_{ij}^{(p)}$  correspondant comme suit

$$\mathbb{A}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} A_{ij}^{(p)} e^{-\lambda \varphi(|A_{ij}^{(p+1)} - A_{ij}^{(p)}|)} \quad (5)$$

où  $\varphi$  est une fonction positive croissante et  $\lambda > 0$ .

Cette moyenne a pour but de '*sélectionner*' les composantes périodiques qui vont figurer dans l'image finale  $\mathbb{A}$  et '*d'amortir*' toutes les autres parties. Il en résulte une sorte de segmentation sélective des composantes des différentes réalisations. Plusieurs inconvénients dans la réalisation pratique de cette méthode :

- La présence du bruit peut fausser la mesure de la différence  $|A_{ij}^{(p+1)} - A_{ij}^{(p)}|$  ; cela peut conduire à garder des pixels qui auraient dû être amortis et vice-versa.
- La différence de contraste ou d'intensité entre les différentes réalisations
- Le choix de la fonction  $\varphi$  : il devrait donc tenir compte des points précédents. Aussi  $\varphi$  doit-elle être fonction du gradient dans le voisinage afin que le lissage soit adaptatif.

### 5.3 Segmentation et restauration par approches variationnelles

Dans ces approches, une image est représentée par une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{R}^3$  pour les images en couleur). En général  $\Omega$  désigne un rectangle et  $f(x, y)$  représente le niveau de gris du pixel situé aux coordonnées  $(x, y)$ .

Les problèmes d'amélioration et de restauration des images en utilisant des équations aux dérivées partielles (EDPs) sont largement discutés dans la littérature [?, ?]. Lors de l'acquisition d'une image  $u$ , celle-ci est dégradée par un opérateur de convolution  $R$  et d'un bruit  $n$  ; l'image mesurée se présente donc sous la forme

$$f = Ru + n. \quad (6)$$

### a) Restauration et régularisation

la reconstitution de l'image originale à partir de l'image mesurée  $g$  par approche variationnelle consiste à retrouver l'image  $u$  qui minimise l'énergie  $J(u)$  suivante

$$J(u) = J_1(u) + \lambda J_2(u) \quad (7)$$

où

- $J_1(u)$  est un terme d'attache aux données ; en général

$$J_1(u) = \|Ru - f\|_2^2, \quad \text{ou} \quad \|u - f\|_2^2 \quad \text{avec} \quad R = \text{Id.}$$

- $J_2(u)$  est un terme de régularisation ou de lissage, qui dépend généralement de  $\nabla u$ . Par exemple, dans la régularisation dite de Tikhonov, on a

$$J_2(u) = \|\nabla u\|_2^2.$$

Ainsi la minimisation de (??) revient à résoudre l'EDP suivante

$$\begin{cases} -\text{div}(\lambda \nabla u) + u &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

### b) Diffusion isotrope

Une des approches populaires dans la restauration est la convolution linéaire, afin de réduire le bruit, avec un noyau gaussien

$$u(x, y, t) = G_{\sqrt{2t}} * f \quad (9)$$

avec  $G_\sigma$  le noyau gaussien donné en dimension 2 par

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

On remarque aisément que  $u$  donnée en (??) est solution de l'EDP de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x, y, t) &= \text{div}(\nabla u(x, y, t)) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, 0) &= f(x, y). \end{cases} \quad (10)$$

Cette EDP s'opère donc par lissage isotrope au sens où aucune direction n'est privilégiée. Cela présente clairement des inconvénients dans la mesure où le bruit et les discontinuités (bords et contours) sont lissés de la même façon diminuant ainsi le contraste visuel. Il faut donc réajuster la diffusion de manière sélective.

### c) Diffusion anisotrope : modèle de Peronna-Malik

Pour corriger les défaut de l'EDP de chaleur, le modèle suivant a été proposé

$$\begin{cases} \partial_t u(x, y, t) &= \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, 0) &= f(x, y). \end{cases} \quad (11)$$

#### d) Diffusion anisotrope : modèle de Peronna-Malik amélioré

La présence de bruit induit de fortes oscillations de  $\nabla u$  ; l'EDP (??) va donc préserver le bruit en le considérant comme des contours. Pour corriger ce problème on peut convoluer le gradient par une gaussienne

$$\begin{cases} \partial_t u(x, y, t) &= \operatorname{div} (c(G_\sigma * |\nabla u|) \nabla u) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, y, 0) &= f(x, y). \end{cases} \quad (12)$$

#### Remarques :

##### 1. Cas de la restauration :

Dans les modèles (??) et (??) la fonction  $c$  doit être positive et décroissante. Ainsi les régions de fort gradient (i.e. les contours) subissent un lissage modéré pour conserver un contraste visuel acceptable. Par exemple

$$c(t) = (1 + (t/\alpha)^2)^{-m}, \quad m \in \mathbb{R}^+ \quad (13)$$

##### 2. Cas des images périodiques :

Nous savons que dans le cas qui nous intéresse, les différentes réalisations sont dégradées par la présence d'arbres de forte intensité et dont les contours sont bien marqués. Pour les lisser et ne garder que la composante périodique, la fonction  $c(|\nabla u|)$  dans (??) et (??) doit être croissante, à l'inverse du cas de la restauration. Ainsi, les régions de très fort gradient seront fortement lissées et vice-versa ; cela nécessiterait peut être l'introduction d'un seuillage : la fonction  $c$  binaire ou en escalier, pour obtenir une bonne efficacité !

## Références

- [1] A. K. Barros and A. Cichocki, "Extraction of Specific Signals with Temporal Structure", *Neural Computation*, vol. 13, no. 9, pp. 1995–2003, 2001.
- [2] F. Grubbs, "Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples", *Technometrics*, vol. 11, no. 1, pp. 1–21, 1969.
- [3] Ndiaye, S. Courbes remplissant l'espace et clustering dans les bases de données spatiales, 1994.
- [4] Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Deriche, R. et Faugeras, O. Les EDP en Traitement Des Images et Vision Par Ordinateur [PDE's in Image Processing and Computer Vision]. 1995.
- [5] Coquelin, P.-A. et Rabarisoa, J. La corrélation des images sur des balayages fractales, 2004.
- [6] Aujol, J.-F. Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles. 2005.